

**Демонстрационная версия
добровольной сертификации для учителей МАТЕМАТИКИ**

Работа состоит из двух частей, включающих в себя 13 заданий (аналогичных заданиям ЕГЭ по математике (профильного уровня), их тип указан рядом с номером).

Первая часть – тестовая, содержит 8 заданий с кратким ответом. Каждое задание оценивается по 1 баллу.

Вторая часть – практическая (письменная), содержит 5 заданий, требующие развернутого ответа. Каждое задание данной части оценивается от 0 до 4 баллов в соответствии с критериями ЕГЭ. Критерии оценивания представлены. На выполнение работы отводится 120 минут.

Структура демонстрационного материала:

справочные материалы по математике

задания тестовой части – с. 1-2

задания второй части – с. 2 - 3

ответы на тестовую часть – с. 4-5

ответы на вторую часть – с. 5-10

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

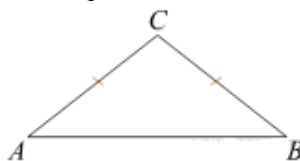
$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Тестовая часть

1. (Тип 1).

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ: _____

2. (Тип 2).

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $2\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен 150° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____

3. (Тип 5).

В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: _____

4. (Тип 6).

Решите уравнение $\log_2 \frac{x}{6} = \log_{0,5}(x + 1)$. Если уравнение имеет больше одного корня, укажите меньший из корней.

Ответ: _____

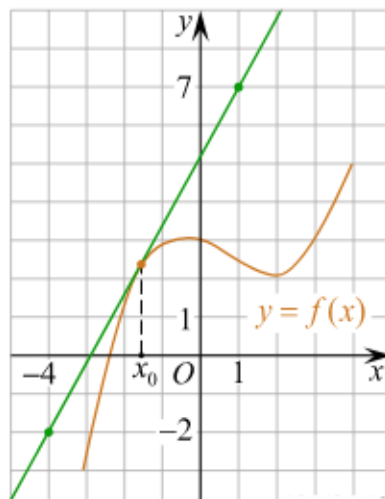
5. (Тип 7).

Найдите $2 \cos 2\beta$, если $\sin \beta = -0,7$.

Ответ: _____

6. (Тип 8).

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____

7. (Тип 10).

Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяженностью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

8. (Тип 12).

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 3]$.

Ответ: _____

Практическая (письменная) часть

9. (Тип 14).

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α , перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α — это четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны.

б) Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 6.

10. (Тип 15).

Решите неравенство $2 \cdot \left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2} \right)^2 - 7 \cdot \frac{7^x + 7^{-x}}{2} + 3 \leq 0$.

11. (Тип 16).

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке 800 тыс. рублей на восемь лет. Условия его возврата таковы:

- ✓ каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- ✓ каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- ✓ с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- ✓ в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- ✓ к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тысяч рублей.

12. (Тип 17).

Пятиугольник $ABCDE$ — вписанный, точка M — пересечение диагоналей BE и AD . Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны

б) Найдите AB , если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

13. (Тип 18).

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

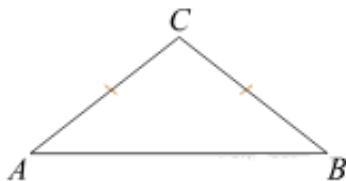
$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответы к заданиям тестовой части

1. (Тип 1).

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ: 100

2. (Тип 2).

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $2\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен 150° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: - 15

3. (Тип 5).

В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: 0,16

4. (Тип 6).

Решите уравнение $\log_2 \frac{x}{6} = \log_{0,5}(x + 1)$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из корней.

Ответ: 2

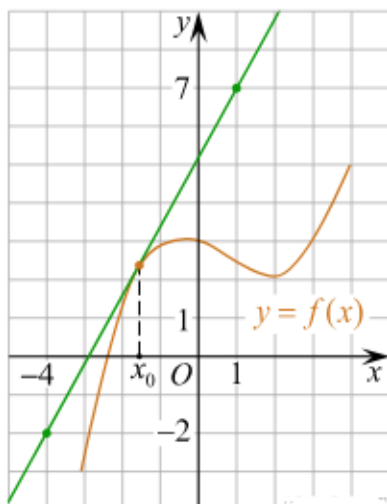
5. (Тип 7).

Найдите $2 \cos 2\beta$, если $\sin \beta = -0,7$.

Ответ: 0,04

6. (Тип 8).

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: 1,8

7. (Тип 10).

Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяженностью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 108

8. (Тип 12).

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 3]$.

Ответ: - 6

Решения и критерии оценивания выполнения заданий практической части

9. (Тип 14).

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α , перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α — это четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны.

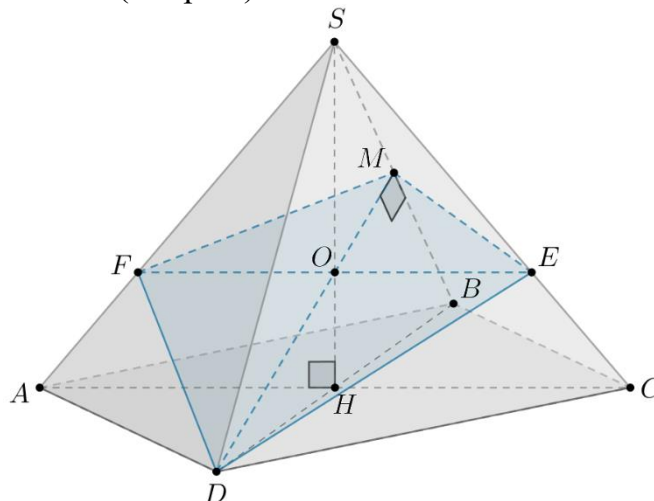
б) Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 6.

Решение:

а) Пусть SH — высота пирамиды $SABCD$. Так как эта пирамида правильная, то H — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.

Так как $\alpha \perp SB$, то SB перпендикулярна любой прямой из α . Следовательно, $DM \perp SB$. Пусть $O = DM \cap SH$.

Так как $SH \perp (ABC)$, $BH \perp AC$, то по теореме о трех перпендикулярах $SB \perp AC$. Проведем через точку O прямую $EF \parallel AC$ (см. рис.).



Тогда $EF \perp SB$. Следовательно, $DEMF$ — сечение пирамиды плоскостью α . Также по теореме о трех перпендикулярах $DM \perp AC$.

Следовательно, так как $EF \parallel AC$, то диагонали сечения DM и EF перпендикулярны. Что и требовалось доказать.

б) Так как диагонали сечения $DEMF$ взаимно перпендикулярны, то площадь сечения можно искать по формуле: $S = S_{DEMF} = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot EF$.

По условию $SA = 6$, а $AB : SA = 1 : \sqrt{2}$. Следовательно, $AB = SA : \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Следовательно, $BD = AB\sqrt{2} = 6$.

Значит, $\triangle BSD$ равносторонний. Тогда

$$DM = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Так как $\triangle BSD$ равносторонний, то DM и SH — не только высоты, но и медианы этого треугольника.

Следовательно, точкой пересечения они делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Тогда $\frac{SO}{OH} = \frac{2}{1}$

$\triangle FSE \sim \triangle ASC$, следовательно,

$$\frac{EF}{AC} = \frac{SO}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}BD = 4$$

Тогда искомая площадь равна $S = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot EF = 6\sqrt{3}$.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

10. (Тип 15).

Решите неравенство $2 \cdot \left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7^x + 7^{-x}}{2} + 3 \leq 0$.

Решение:

Пусть $t = \frac{7^x + 7^{-x}}{2}$, тогда получаем

$$2t^2 - 7t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 3.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{7^x + 7^{-x}}{2} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 7^x + 7^{-x} \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq 7^x + \frac{1}{7^x} \leq 6 \Leftrightarrow 7^x + \frac{1}{7^x} \leq 6 \Leftrightarrow_{7^x > 0}$$

$$\Leftrightarrow_{7^x > 0} (7^x)^2 - 6 \cdot 7^x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq 7^x \leq 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_7(3 - 2\sqrt{2}) \leq x \leq \log_7(3 + 2\sqrt{2}).$$

В (*) мы воспользовались тем, что сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше двух.

Ответ: $\left[\log_7 \left(3 - 2\sqrt{2} \right); \log_7 \left(3 + 2\sqrt{2} \right) \right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

11. (Тип 16).

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке 800 тыс. рублей на восемь лет. Условия его возврата таковы:

- ✓ каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- ✓ каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- ✓ с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- ✓ в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- ✓ к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тысяч рублей.

Решение:

Схема возврата долга дифференцированная. Основной долг заемщика перед четвертым, пятым и восьмым платежными годами составит: 500 тыс. руб., 400 тыс. руб. и 100 тыс. руб. соответственно. Переплата заемщика за период первых 4 платежных года найдем как сумму первых 4 членов арифметической прогрессии:

$$S_1 = \frac{800 \cdot 0,01r + 500 \cdot 0,01r}{2} \cdot 4 = 13r \cdot 2 = 26r \text{ (тыс. руб.)}.$$

Аналогичная сумма за последние 4 платежных года равна

$$S_2 = \frac{0,15 \cdot 400 + 0,15 \cdot 100}{2} \cdot 4 = (60 + 15) \cdot 2 = 150 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Общая сумма выплат заемщика в тыс. рублях составит $26r + 150 + 800$, что равно 1444.

Решим уравнение: $26r = 1444 - 950 \Leftrightarrow 26r = 494 \Leftrightarrow r = 19$.

Ответ: 19

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

12. (Тип 17).

Пятиугольник $ABCDE$ — вписанный, точка M — пересечение диагоналей BE и AD .

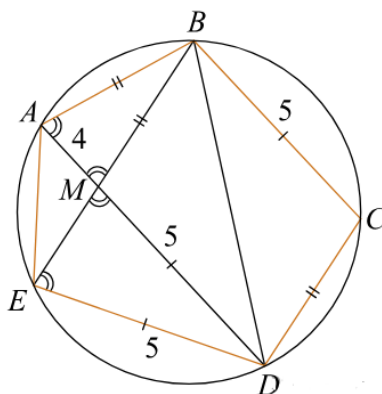
Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.

б) Найдите AB , если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

Решение:

а) Так как четырехугольник $BCDM$ — параллелограмм, стороны CD и BM параллельны. При этом сторона BC не параллельна отрезку DE , поскольку иначе DM и DE были бы параллельны, а они пересекаются. Значит, $BCDE$ — вписанная трапеция, а потому она равнобедренная. Следовательно, $BC = DE$.



б) Из пункта а) известно, что $BC = DE = 5$. Четырехугольник $BCDM$ — параллелограмм, поэтому $BC = DM$.

Таким образом, $DE = DM = 5$, а потому треугольник DEM равнобедренный, откуда следует, что углы DEM и DME равны. Углы DME и BMA также равны как вертикальные. Углы DEM и BAM равны, так как опираются на одну дугу. Следовательно, треугольник BMA равнобедренный, а потому $AB = BM$. Треугольники BMA и DEM подобны по двум равным углам, а значит,

$$\frac{AB}{DM} = \frac{AM}{ME} \Leftrightarrow \frac{AB}{DM} = \frac{AD - DM}{BE - AB},$$

откуда

$$\frac{AB}{5} = \frac{4}{12 - AB} \Leftrightarrow AB^2 - 12AB + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 10, \\ AB = 2. \end{cases}$$

Заметим, что если $AB = 2$, то неравенство $AB + BM > AM$ для треугольника ABM не выполняется, поэтому $AB = 10$.

Ответ: б) 10.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

13. (Тип 18).

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

Каждое решение уравнения

$$(x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0$$

либо является решением уравнения $x - y + 3 = 0$, откуда $y = x + 3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0, \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y \leq x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 5x + 3 \leq x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 6x \leq 0, \end{cases}$$

откуда $y = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y = 3x + a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от a .

Первый случай: $3x + a = x + 3$, откуда $x = \frac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x + a = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$.

Получаем квадратное уравнение $x^2 - 8x - a + 3 = 0$.

Дискриминант этого уравнения равен $64 + 4(a - 3) = 4(a + 13)$.

Значит, уравнение $x^2 - 8x - a + 3 = 0$ имеет два корня при $a > -13$, имеет единственный корень $x = 4$ при $a = -13$ и не имеет корней при $a < -13$.

При $a > -13$ функция $f(x) = x^2 - 8x - a + 3$ принимает наименьшее значение при $x = 4$, и это значение отрицательно.

Следовательно, больший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(6) \geq 0$; $-a - 9 \geq 0$, откуда $a \leq -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(0) \geq 0$; $-a + 3 \geq 0$, откуда $a \leq 3$.

Число $\frac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f(x) = 0$ при

$$\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 - 4(3-a) - a + 3 = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + 3(a-3) = 0 \Leftrightarrow (a-3)(a+9) = 0,$$

то есть при $a = 3$ и при $a = -9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.

Ответ: $a = -13; -9 \leq a < 3$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением/включением точки $a = -9$ и/или $a = 3$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-9; 3)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4